Юрій ВОЛКОВ, Наталія ВОЙНАЛОВИЧ

СЕРЕДНІ: ЙМОВІРНІСНИЙ ПІДХІД

Різноманітні нерівності доводяться з використанням таких понять як математичне сподівання та медіана.

Various inequalities are proved with the use of such concepts as the expectation and median.

Серце математики в її задачах (П.Халмош), приклади корисніші за правила (Д. Пойя): ці твердження не вимагають доведення. Знати якийсь розділ математики означає вміти розв'язувати задачі з цього розділу. При цьому для поглибленого розуміння відповідного навчального матеріалу вельми корисними будуть різні способи розв'язування однієї й тієї ж задачі.

Особливо це стосується методів розв'язування важливих задач, які породили нові напрямки в математиці. Прикладом може служити методи доведення нерівностей між середніми різних типів. Середні величини в математиці та її застосуваннях всюдисущі, тому їм при вивченні математики певна увага приділяється, та, на наш погляд, вони заслуговують значно більшої. Існує багато літературних джерел про середні, ми звертаємо увагу лише на класику, з якою конче потрібно ознайомити студентів-майбутніх вчителів. Це монографії [1-4].

Мета даної роботи дати студентам міцне підґрунтя для освоєння теорії нерівностей і продемонструвати силу ймовірнісного підходу до цієї тематики, використовуючи поняття математичного сподівання й медіани.

Реалізувати мету можна при вивченні теорії ймовірностей і математичної статистики, в спеціальному курсі «конкретна математика», який запроваджено для вчительських спеціальностей фізико-математичного факультету.

1. Математичне сподівання

Математичне сподівання (середнє значення) для дискретної випадкової величини ξ, розподіл якої задано таблицею

Таблиця 1.

ξ	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

($p_1+p_2+\ldots+p_n=1$), знаходиться за формулою: $$\mathrm{M}\xi = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k.$$

а математичне сподівання $f(\xi)$, якщо функція f визначена на множині значень ξ, знаходиться за формулою: $$\mathrm{M}f(\xi) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) p_k.$$

Математичне сподівання для абсолютно неперервної випадкової величини ξ зі щільністю $p(x)$ знаходиться за формулою $$\mathrm{M}\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx,$$ а математичне сподівання $f(\xi)$, якщо функція f визначена на множині значень ξ, знаходиться за формулою

$\mathrm{M}f(\xi)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)p(x)dx$, якщо ці математичні сподівання існують. Далі, якщо інтегрування йтиме по всій числовій осі, межі інтегрування не будемо ставити.

Математичне сподівання функції $f(\xi)$ від випадкової величини, розподіл якої задано за допомогою довільної ймовірнісної міри **P**, знаходиться за формулою $\mathrm{M}f(\xi)=\int f(x)dP(x)$, якщо це математичне сподівання існує.

Операція знаходження математичного сподівання лінійна, монотонна (тобто, якщо $\xi<\eta$, то $\mathrm{M}\xi\leq\mathrm{M}\eta$), математичне сподівання сталої є стала, зокрема, $\mathrm{M}(\xi-\mathrm{M}(\mathrm{M}\xi))=0$.

2. Опуклість

Означення. *Функція $\varphi(x)$, яка визначена на скінченному або нескінченному відкритому проміжку X, називається опуклою вниз (вгору) на цьому проміжку, якщо для всякого x_0 з проміжку X знайдеться таке число $\beta(x_0)$, що для всякого $x\in X$*

$$\varphi(x)-\varphi(x_0)\geq\beta(x_0)(x-x_0)\ \ (\varphi(x)-\varphi(x_0)\leq\beta(x_0)(x-x_0)).$$

Якщо в цих нерівностях замінити знаки $\geq(\leq)$ на знаки > (<), то функція $\varphi(x)$ називається строго опуклою вниз(вгору).

Це означає: через кожну точку графіка функції φ можна провести таку пряму (її називають опорною), що графік функції φ лежатиме над (під) цією прямою.

Функції опуклі вниз часто називаються просто опуклими. Якщо функція $\varphi(x)$ є опуклою вгору, то функція (– $\varphi(x)$) буде опуклою вниз. Тому далі розглядати-мемо опуклі функції.

Часто використовують еквівалентне означення опуклості: *функція називається опуклою на X, якщо люба хорда графіка функції знаходиться над відповідною частиною графіка; якщо φ двічі диференційована на X, то опуклість φ рівносильна нерівності $\varphi''(x)\geq 0$ на X.*

3. Нерівність Єнсена

Теорема 1. *Нехай функція $\varphi(x)$ опукла на проміжку X, значення випадкової величини ξ і* **M***ξ знаходяться в проміжку X й існує математичне сподівання* **M***φ(ξ). Тоді має місце нерівність*

$\mathbf{M}\varphi(\xi)\geq\varphi(\mathbf{M}\xi)$. (1)

Проведемо через точку ($\mathrm{M}\xi$, $\varphi(\mathrm{M}\xi)$) таку пряму, щоб її графік знаходився під графіком функції $\varphi(x)$. Нехай β кутовий коефіцієнт цієї прямої, а $\mathbf{M}\xi=m$. Тоді її рівняння: $y=\varphi(m)+\beta(x-m)$, і з опуклості $\varphi(x)$ випливає нерівність $\varphi(x)-\varphi(m)-\beta(x-m)\geq 0$, $x\in X$. Підставимо сюди замість x ξ, отримаємо нерівність $\varphi(\xi)-\varphi(m)-\beta(\xi-m)\geq 0$, а далі подіємо на обидві частини цієї нерівності оператором **M.** Через те що $\mathbf{M}(\varphi(m))=\varphi(m)$, $\mathbf{M}((\xi-m))=0$, отримаємо нерівність $\mathbf{M}\varphi(\xi)-\varphi(m)\geq 0$, яка еквівалентна нерівності (1).

Нерівність (1) називають нерівністю **Єнсена**.

Наслідок 1. *Нехай функції* $g_1(x)$ і $g_2(x)$ *строго зростаючі на проміжку X, а складна функція* $g_2(g_1^{-1}(x))$ *опукла на X. Тоді має місце нерівність*

$g_2^{-1}(\mathrm{M}g_2(\xi))\geq g_1^{-1}(\mathrm{M}g_1(\xi))$ (2)

де g_1^{-1} *і* g_2^{-2} *функції обернені до функцій* g_1 і g_2

Доведення. Позначимо через η випадкову величину $g_1(\xi)$. Тоді згідно нерівності (1)

$Mg_2(g_1^{-1}(\eta)) \ge g_2(g_1^{-1}(M\eta))$. Звідси $g_2^{-1}(M(g_2(g_1^{-1}(\eta))) \ge g_1^{-1}(M\eta)$

а через те що $\eta = g_1(\xi)$, а, отже, $\xi = g_1^{-1}(\eta)$ і тому отримаємо нерівність (2).

Наслідок 2. *Нехай* $\xi > 0$. *Тоді функція* $\psi(t) = (M\xi^t)^{1/t}$ *монотонно зростає на проміжку* (-∞, ∞).

Нехай $t_2 > t_1$ довільні додатні числа . Досить довести нерівність $\psi(t_2) > \psi(t_1)$. Скористаємось наслідком 1. Нехай $g_1(x) = x^{t_1}, g_2(x) = x^{t_2}$. Тоді $g_2(g_1^{-1}(x)) = x^{t_2/t_1}$ і ця функція опукла на проміжку (0, ∞). Отже, матимемо нерівність

$\psi(t_2) = (M(\xi^{t_2}))^{1/t_2} \ge (M(\xi^{t_1}))^{1/t_1} = \psi(t_1)$, що й потрібно було довести.

Остання нерівність зберігається і у випадку, коли $t_1 = 0$, якщо під числом $\psi(0)$ будемо розуміти $\lim\limits_{t\to 0}\psi(t) = \exp\left(\lim\limits_{t\to 0}\frac{d}{dt}(M\xi^t)\right)$.

Якщо ж $t_2 > t_1$ будь-які від'ємні числа, то тоді покладемо $g_1(x) = x^{-t_1}$, $g_2(x) = x^{-t_2}$ і далі проведемо міркування подібні до попередніх, враховуючи при цьому, що опуклою буде функція $-g_2(g_1^{-1}(x))$.

Наслідок 3. Нехай розподіл ξ задано таблицею 1 і всі x_k додатні. Тоді функція $\psi(t) := (p_1x_1^t + \cdots + p_nx_n^t)^{1/t}$ монотонно зростає на всій числовій осі.

Звернемо увагу на те, що $\psi(\infty)$ це max{$x_1,\ldots, x_n$}, $\psi(2)$ – зважене середнє квадратичне, $\psi(1)$ – зважене середнє арифметичне, $\psi(0)$ – зважене середнє геометричне, $\psi(-1)$ – зважене середнє гармонічне, $\psi(-\infty)$ це min{$x_1,\ldots, x_n$}, отже,

$\psi(\infty) \ge \psi(2) \ge \psi(1) \ge \psi(0) \ge \psi(-1) \ge \psi(-\infty)$.

При вивченні нерівності Єнсена виникає питання: коли ця нерівність перетворюється в рівність? Неважко перевірити − якщо функція φ лінійна, то **M**$\varphi(\xi)$ = φ(**M**ξ). Справді, в цьому випадку

$\varphi(x) = ax + b$, отже, $M\varphi(\xi) = M(a\xi + b) = aM\xi + b = \varphi(M\xi)$.

Має місце й обернене твердження: *якщо* $M\varphi(\xi) = \varphi(M\xi)$, *то функція* φ *лінійна.*

4. Приклади опуклих функцій

Функції $a^x, a > 1, -\infty < x < \infty; x^r, r > 1, 0 < x < \infty; x\log x, 0 < x < \infty$; $\log\frac{1-x}{x},\ 0 < x \le \frac{1}{2}$ є строго опуклими, бо легко перевірити, що на вказаних проміжках $\varphi''(x) > 0$.

Важливими строго опуклими функціями будуть ще й такі:

$\psi(x) = \log(a_1^x + \cdots + a_n^x)$ і функція $\psi(x)/x = \log(a_1^x + \cdots + a_n^x)^{1/x}, x > 0$.

Доведемо опуклість функції $\psi(x)$. Знайдемо $\psi''(x)$. Маємо

$$\psi''(x)=\frac{\left(a_1^x(\log a_1)^2+\cdots+a_n^x(\log a_n)^2\right)\cdot\left(a_1^x+\cdots+a_n^x\right)-\left(a_1^x\log a_1+\cdots+a_n^x\log a_n\right)^2}{\left(a_1^x+\cdots+a_n^x\right)^2}.$$

Додатність чисельника випливає з тотожності

$$\left(a_1^x(\log a_1)^2+\cdots+a_n^x(\log a_n)^2\right)\cdot\left(a_1^x+\cdots+a_n^x\right)=$$

$$\left(a_1^x\log a_1+\cdots+a_n^x\log a_n\right)^2+\sum_{1\le i<j\le n}a_i^xa_j^x(\log a_i-\log a_j)^2,$$

яка є наслідком добре відомої тотожності Лагранжа:

$$\left(x_1^2+\cdots+x_n^2\right)\cdot\left(y_1^2+\cdots+y_n^2\right)=(x_1y_1+\cdots+x_ny_n)^2+\sum_{1\le i<j\le n}(x_iy_j-x_jy_i)^2.$$

Опуклість функції $\psi(x)/x$ доведемо для частинного випадку: $n=2, a_1=1, a_2=a$, тобто, функції $\varphi(x)=\frac{\log(1+a^x)}{x}, a>0, x>0$. Для цього вираз для другої похідної функції φ потрібно перетворити до виду

$$\varphi''(x)=\frac{2(1+a^x)\left(a^x\log(1+a^{-x})+\log(1+a^x)\right)+a^x(\log a^x)^2}{x^3(1+a^x)^2}>0.$$

5. Приклади нерівностей

Приклад 1. Нехай розподіл випадкової величини ξ задано таблицею 1 і всі x_k додатні. Тоді нерівність (1) перетворюється в таку:

$$\varphi(x_1)p_1+\cdots+\varphi(x_n)p_n\ge\varphi(x_1p_1+\cdots+x_np_n). \quad (1)$$

Приклад 2. Для абсолютно неперервної випадкової величини ξ зі щільністю $p(x)$ нерівність (1) перетворюється в таку:

$$\int_0^\infty\varphi(x)p(x)dx\ge\varphi\left(\int_0^\infty xp(x)dx\right). \quad (2)$$

якщо ξ рівномірно розподілена на проміжку $[a,b]$, то $M\xi=(a+b)/2$

і тому середнє значення функції $\varphi(x)$ на проміжку $[a,b]$

$$\varphi(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b\varphi(x)dx\ge\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

а якщо функція $\varphi(x)$ строго монотонно зростає на проміжку $[a,b]$, то $c>(a+b)/2$.

Приклад 3. Нехай $\varphi(x)=\exp(x)$. Тоді $\mathrm{M}\exp(\xi)\ge\exp(\mathrm{M}\xi)$) і якщо розподіл ξ задано таблицею

Таблиця 2.

ξ	$\log x_1$	$\log x_2$	…	$\log x_n$
P	p_1	p_2	…	p_n

, то

$$p_1\exp(\log x_1)+\cdots+p_n\exp(\log x_n)\ge\exp(p_1\log x_1+\cdots+p_n\log x_n)$$

і ця нерівність рівносильна нерівності між зваженим середнім арифметичним і зваженим середнім геометричним:

$$p_1x_1+\cdots+p_nx_n\ge x_1^{p_1}\cdots x_n^{p_n}. \quad (3)$$

Приклад 4. Нехай

$\varphi(x)=\log\frac{1-x}{x},\ 0<x\le\frac{1}{2}$. Тоді $\mathrm{M}\log\frac{1-\xi}{\xi}\ge\log\frac{1-\mathrm{M}\xi}{\mathrm{M}\xi}$, і , якщо розподіл ξ задано таблицею і при цьому всі $0<x_i\le 1/2$, то

$$p_1\log\frac{1-x_1}{x_1}+\cdots+p_n\log\frac{1-x_n}{x_n}\ge\log\frac{1-(p_1x_1+\cdots+p_nx_n)}{p_1x_1+\cdots+p_nx_n}$$

і ця нерівність рівносильна нерівності Кі Фана:

$$\frac{(1-x_1)^{p_1}\cdots(1-x_n)^{p_n}}{x_1^{p_1}\cdots x_n^{p_n}}\ge\frac{p_1(1-x_1)+\cdots+p_n(1-x_n)}{p_1x_1+\cdots+p_nx_n}.$$

Приклад 5. Нехай $\varphi(x)=x\log x, x>0$. Тоді $M(\xi\log\xi)\ge M\xi\log(M\xi)$, і, якщо розподіл ξ задано таблицею 1, то

$$p_1x_1\log x_1+\cdots+p_nx_n\log x_n\ge(p_1x_1+\cdots+p_nx_n)\cdot\log(p_1x_1+\cdots+p_nx_n). \tag{4}$$

Приклад 6. Нехай $\varphi(x)=\log(b_1^x+\cdots+b_n^x), b>1, x>0.$ Тоді $\mathrm{M}\log(b_1^{\xi}+\cdots+b_n^{\xi})\ge\log\left(b_1^{\mathrm{M}\xi}+\cdots+b_{n1}^{\mathrm{M}\xi}\right)$ і, якщо розподіл ξ задано таблицею 1 (в якій *n* замінено на *m*) , то матимемо нерівність:

$$p_1\log(b_1^{x_1}+\cdots+b_n^{x_1})+\cdots+p_m\log(b_1^{x_m}+\cdots+b_n^{x_m})\ge\log\left(b_1^{p_1x_1+\cdots+p_mx_m}+\cdots+b_n^{p_1x_1+\cdots+p_mx_m}\right)$$

,

яка рівносильна нерівності

$$(b_1^{x_1}+\cdots+b_n^{x_1})^{p_1}\cdots(b_1^{x_m}+\cdots+b_n^{x_m})^{p_m}\ge b_1^{p_1x_1+\cdots+p_mx_m}+\cdots+b_n^{p_1x_1+\cdots+p_mx_m}.$$

Перепозначимо: $a_{ij}:=b_j^{x_i},\ 1\le i\le m,\ 1\le j\le n$. Тоді остання нерівність перепишеться так:

$$(a_{11}+\cdots+a_{1n})^{p_1}\cdots(a_{m1}+\cdots+a_{mn})^{p_m}\ge a_{11}^{p_1}\cdots a_{m1}^{p_m}+\cdots+a_{1n}^{p_1}\cdots a_{mn}^{p_m}. \tag{5}$$

6. Медіана

Означення 1. *Медіаною випадкової величини ξ називається довільне число m таке,що* $\mathrm{P}(\xi\le m)\ge 1/2$ *і* $\mathrm{P}(\xi\ge m)\ge 1/2$ **(** *що рівносильне умові* $\mathrm{P}(\xi<m)\le 1/2$ **і** $\mathrm{P}(\xi>m)\le 1/2$**).** *Може існувати ціла множина медіан, яка завжди буде замкненим інтервалом* $m_0\le m\le m_1$.

Наприклад, нехай ξ має біноміальний розподіл з параметрами (9, 1/4), тоді число *m*=3 буде єдиною медіаною; а якщо параметри такі: (9, 1.2), то кожне число з проміжку [4, 5] буде медіаною. А, наприклад, якщо ξ має показниковий розподіл з параметром α, то медіаною буде число $\log 2/\alpha$.

В статистиці *медіаною називають значення серединного елемента* $m=a_{n+1}$ *варіаційного ряду*

$$a_1,a_2,\ldots,a_{n+1},\ldots,a_{2n+1}\ (a_1\le a_2\le\ldots\le a_{n+1}\le\ldots\le a_{2n+1}), \tag{7}$$

якщо об'єм вибірки непарне число і число $(a_{n-1}+a_n)/2$ *, якщо об'єм вибірки парне число рівне* 2*n*.

Таке означення частинний випадок попереднього, бо досить розглянути випадкову величину, розподіл якої задано таблицею

Таблиця 3.

ξ	b_1	b_2	…	b_m
P	$n_1/(2n+1)$	$n_2/(2n+1)$	…	$n_m/(2n+1)$

,

де $b_1 < b_2 < \ldots < b_m$ різні значення елементів a_i, кожне з яких зустрічається у варіаційному ряду, відповідно, $n_1, n_2, \ldots, n_m$ $(n_1 + n_2 + \ldots + n_m = 2n+1)$ разів.

Означення 2. *Нехай існує* $\mathrm{M}|\xi|$*.Функцію* $\delta(x) := \mathrm{M}|\xi - x| < \infty, x \in R,$ *будемо називати модульним відхиленням випадкової величини ξ від числа x.*

Знайдемо формулу для знаходження модульного відхилення.

$$\mathrm{M}|\xi - x| = \int |t-x|\,dP(t) = \int\limits_{(-\infty,x]} (x-t)dP(t) + \int\limits_{(x,\infty)} (t-x)dP(t) = x \int\limits_{(-\infty,x]} dP(t) -$$

$$\int\limits_{(-\infty,x]} tdP(t) + \int\limits_{(x,\infty)} tdP(t) - x \int\limits_{(x,\infty)} dP(t) = 2x \int\limits_{(-\infty,x]} dP(t) - x + \alpha - 2 \int\limits_{(-\infty,x]} tdP(t) =$$

$$\alpha - x + 2 \int\limits_{(-\infty,x]} (x-t)dP(t),\ \text{де}\ \alpha = \mathrm{M}\xi = \int\limits_{(-\infty,x]} tdP(t) + \int\limits_{(x,\infty)} tdP(t).$$

Отже, остаточно матимемо

$$\delta(x) = \alpha - x + 2 \int\limits_{(-\infty,x]} (x-t)dP(t) \qquad (8)$$

Ця формула рівносильна такій

$$\delta(x) = x - \alpha + 2 \int\limits_{(x,\infty)} (t-x)dP(t) \qquad (8')$$

Теорема 3. *Модульне відхилення випадкової величини ξ мінімізується на її медіані m, тобто,* $\delta(m) \le \delta(x), \forall x \in R.$

Доведення. Досить довести, що $\mathrm{M}|\xi - x| - \mathrm{M}|\xi - m| \ge 0.$

Розглянемо, наприклад, випадок, коли $m < x.$ Тоді матимемо, використовуючи (8), і враховуючи, що $(-\infty, x] = (-\infty, m] \cup (m, x]$:

$$\mathrm{M}|\xi - x| - \mathrm{M}|\xi - m| = \alpha - x + 2 \int\limits_{(-\infty,x]} (x-t)dP(t) - \left(\alpha - m + 2 \int\limits_{(-\infty,m]} (x-t)dP(t) \right) =$$

$$m - x + 2 \int\limits_{(-\infty,m]} ((x-t)-(m-t))dP(t) + 2 \int\limits_{(m,x]} (x-t)dP(t) = (x-m)(2 \int\limits_{(-\infty,m]} dP(t) - 1) +$$

$$2 \int\limits_{(m,x]} (x-t)dP(t) = (x-m)(2P(\xi \le m) - 1) + 2 \int\limits_{(m,x]} (x-t)dP(t) \ge 0.$$

Отже, у випадку, коли *x*>*m*,

$$\delta(x) = \delta(m) + (x-m)(2P(\xi \le m) - 1) + 2 \int\limits_{(m,x]} (x-t)dP(t)$$

Аналогічно розглядається випадок, коли *m*>*x*, тоді

$$\delta(x) = \delta(m) + (m-x)(2P(\xi \ge m) - 1) + 2 \int\limits_{[x,m)} (t-x)dP(t)$$

.

Наслідок 1. *Нехай розподіл випадкової величини задано таблицею* 1.
Тоді для m<x

$$\delta(x) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - m| p_k + (x-m)\left(\sum_{\{k|x_k<x\}} p_k - \sum_{\{k|x_k>m\}} p_k \right) + 2 \sum_{\{k|m<x_k\le x\}} (x - x_k) p_k \qquad , (9)$$

а для m>x

$$\delta(x)=\sum_{k=1}^{n}|x_k-m|p_k+(m-x)\left(\sum_{\{k|x_k\ge m\}}p_k-\sum_{\{k|x_k<m\}}p_k\right)+2\sum_{\{k|x\le x_k<m\}}(x_k-x)p_k \quad (10)$$

Наслідок 2. *Нехай задано варіаційний ряд* (7). *Тоді функція* $f(x)=\sum_{i=1}^{2n+1}|a_i-x|$ *є опуклою на всій числовій осі, і в точці* $x=m$ *досягає свого найменшого значення*

$$f(m)=\sum_{i=1}^{n}(a_{i+n+1}-a_i). \quad (11)$$

Розглянемо допоміжну випадкову величину множиною значень якої є числа з варіаційного ряду і всі ці значення рівноймовірні, тобто, $P(\xi=a_k)=1/(2n+1)$. В цьому випадку $m=a_{n+1}$ і

$$f(a_{n+1})=(a_{n+1}-a_1)+(a_{n+1}-a_2)+\cdots+(a_{n+1}-a_n)+0+$$
$$(a_{n+2}-a_{n+1})+(a_{n+3}-a_{n+1})+\cdots+(a_{2n+1}-a_{n+1})=(a_{n+2}-a_1)+\cdots+(a_{2n+1}-a_n),$$

бо зліва від нульового доданку в цій сумі і справа від 0 знаходиться однакова кількість доданків, отже, отримаємо суму (8).

Нехай тепер $x>m$. Тоді з (8) випливає

$$\delta(x)=\frac{1}{2n+1}\left(f(m)+(x-a_{n+1})+2\sum_{\{k|m<x_k\le x\}}(x-x_k)\right).$$

Аналогічно, якщо $x<m$, то

$$\delta(x)=\frac{1}{2n+1}\left(f(m)+(a_{n+1}-x)+2\sum_{\{k|x\le x_k<m\}}(x_k-x)\right).$$

Залишилось звернути увагу на те, що $f(x)=(2n+1)\delta(x)$.

В опуклості легко пересвідчитись, побудувавши графік $f(x)$.

Наслідок 3. *Нехай випадкова величина ξ абсолютно неперервна зі щільністю* $p(t)$. *Тоді*

$$\delta(x)=\int_{-\infty}^{\infty}|t-x|\,p(t)dt=\alpha-m+2\int_{-\infty}^{x}(x-t)p(t)dt=m-\alpha+2\int_{x}^{\infty}(t-x)p(t)dt,$$

медіана m мінімізує цю функцію і функція $\delta(x)$ *опукла на всій числовій осі.*

Дійсно, в цьому випадку

$$\delta(x)=\delta(m)+2\int_{m}^{x}(x-t)p(t)dt, \quad \text{якщо } x>m,$$

$$\delta(x)=\delta(m)+2\int_{x}^{m}(t-x)p(t)dt, \quad \text{якщо } x<m.$$

Звідси $\delta'(x)=2\int_{m}^{x}p(t)dt,\ x>m,\ \delta''(x)=2p(x)\ge 0$.

7. Вправи для самостійного розв'язування

На проміжку *X* задано опуклу функцію $\varphi(x)$. Довести нерівності.

Коли ці нерівності перетворюються в рівності?

1. $\sum_{k=0}^{n} C_n^k \varphi(k) x^k (1-x)^{n-k} \geq \varphi(nx),\ 0 \leq x \leq 1.$

2. $\sum_{k=0}^{\infty} \varphi(k) x^k / k! \geq \varphi(x) e^x,\ x \geq 0.$

3. $\sum_{k=0}^{\infty} \varphi(k) x^k \geq \frac{1}{1-x} \varphi\left(\frac{x}{1-x}\right),\ 0 \leq x \leq 1.$

4. $\int_0^{\infty} \varphi(x) \exp(-x/a) dx \geq a\varphi(a),\ a > 0, x \geq 0.$

5. $\int_0^{\infty} \varphi(x)(xe^x)^{-1/2} dx \geq \varphi(1)\sqrt{2\pi}.$

6. $x(1-x)e^x \Gamma(x) < 1, x > 0.$

7. $a_1^{a_1} \cdots a_n^{a_n} \leq (a_1 + \cdots + a_n)^{a_1 + \cdots + a_n}, a_i > 0, i = 1, \ldots, n.$

8. $x_1 \log \frac{x_1}{a_1} + \cdots + x_n \log \frac{x_n}{a_n} \geq (x_1 + \cdots x_n) \log \frac{x_1 + \cdots x_n}{a_1 + \cdots a_n}, x_i > 0, a_i > 0, i = 1, \ldots, n.$

9. $x_1 \exp \frac{x_1}{a_1} + \cdots + x_n \exp \frac{x_n}{a_n} \geq (x_1 + \cdots x_n) \exp \frac{x_1 + \cdots x_n}{a_1 + \cdots a_n}, x_i > 0, a_i > 0, i = 1, \ldots, n.$

Пропонується 9 задач для самостійного розв'язування, що полегшують розуміння студентами сутності перетворень Єнсена та її доведення.

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Hardy G.M., Littlewood J.E., Polya D. Inequalities / London: Cambridge University Press, 1934.
2. Beckenbach E.F. & Bellman R. Inequalities / Berlin: Springer-Verlag, 1961.
3. Беккенбах Э., Беллман Р. Введение в неравенства / М. «Мир», 1965.
4. Bullen P.S., Handbook of Means and Their Inequalities / Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2003.

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ

Волков Юрій Іванович – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри математики Кіровоградського державного педагогічного університету ім. В. Винниченка

Войналович Наталія Михайлівна – кандидат педагогічних наук, доцент кафедри математики Кіровоградського державного педагогічного університету ім. В. Винниченка.

Наукові інтереси: доведення математичних нерівностей на основі математичного сподівання.